

Title	発散積分ニ関スル一定理
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 262 p.103-p.106
Issue Date	1944-03-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75105
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

1192. 発散積分 = 関スル一定理

角 谷 静 夫 (阪大)

(定理) $f(t), g(t)$ が何レモ $0 \leq t \leq 1$ + 實数ノ区
間 $T = \tau$ 定義サレタ 實数値ノ可測函数ニテ $f(t) \geq 0$,
 $g(t) \geq 0$ が T 上ニテ成立スルモノトスル。但シ $f(t), g(t)$
が T 上ニテ積分可能デアルト云フコトハ假定シタイ。然レ
トキハ

$$(1) \int_E f(t) dt < \infty \longrightarrow \int_E g(t) dt < \infty$$

が任意ノ T ノ可測部分集合 E ニ對シテ成立スルタメニ必要且
十分ノ條件ハ

$$(2) g(t) \leq K f(t) + h(t)$$

がスベラノ $t \in T$ ニ對シテ成立スル如キ常數 K ト T 上ニテ定義
サレタ實數値ノ可積分可測函数 $h(t)$ ニテ T 上ニテ $h(t) \geq 0$
トナルモノが存在スルコトデアル。——

(証明) 上ノ條件が十分デアルコトハ明カデアルカラ
必要ナルコトノミヲ証明スル。コノタメ先ヅ

$$(3) \int_E f(t) dt \leq 1 \longrightarrow \int_E g(t) dt \leq K$$

が任意ノ T ノ可測部分集合ニ對シテ成立スル如キ常數 K が
存在スルコトヲ示サウ。

實際若シ (3)ヲ満足サレル K が存在シタイナラバ

$$(4) \int_{E_n} f(t) dt \leq 1,$$

$$\sum_{R=1}^{n-1} \int_{E_R} g(t) dt + 2^n < \int_{E_n} g(t) dt < \infty$$

トナル如キ \mathbb{T} ノ可測部分集合ノ系列 $\{E_n \mid n=1, 2, \dots\}$ カ存在スル筈デアル。

$$(5) E'_n = E_n - \bar{E}_n \cap \bigcup_{R=1}^{n-1} E_R$$

ト置ケバ $\{E'_n \mid n=1, 2, \dots\}$ ハ互ニ共通点ナク且明カニ

$$(6) \int_{E'_n} f(t) dt \leq 1, \quad 2^n < \int_{E'_n} g(t) dt < \infty$$

カ $n=1, 2, \dots$ ニ對シテ成立スル。又ニ各々ノ E'_n 7 2^n 個ノ互ニ共通点ノナイ可測集合 $\{E''_{n,i} \mid i=1, \dots, 2^n\}$ ニ分テ

$$(7) \int_{E''_{n,i}} g(t) dt > 1, \quad i=1, \dots, 2^n$$

ナラシメタル。然ルトキハ少クトモ一ツノ $i=i_n (1 \leq i_n \leq 2^n)$ ニ對シテ

$$(8) \int_{E''_{n,i_n}} f(t) dt \leq \frac{1}{2^n}$$

トナルカラ $E^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E''_{n,i_n}$ (右辺ノ集合カ互ニ共通点ヲ持タナイコトニ注意!) ト置ケバ (7), (8) ヨリ

$$(9) \int_{E^*} f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E''_{n, i_n}} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq 1$$

$$(10) \int_{E^*} g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E''_{n, i_n}} g(t) dt \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

トナリ假定 (1) = 矛盾スル。ヨッテ (3) ヲ満足スル如キ K / 存在が示サレタ。

$$\mu = \int_E g(t) dt < \infty \quad \text{トシ}$$

$$(11) \quad n-1 \leq \int_E g(t) dt < n$$

ナル如キ正整数 n ヲトル。然ルトキハ E ハ

$$(12) \quad \int_{E''_i} g(t) dt < 1, \quad i = 1, \dots, n$$

ナル如キ互ニ共通点ナキ可測集合 $\{E''_i \mid i = 1, \dots, n\}$ / 和ト考ヘルコトが出来ルカラ

$$(13) \quad \int_E f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{E''_i} f(t) dt \leq nK \leq K \left(\int_E g(t) dt + 1 \right)$$

トナル。

$$(14) \quad h(t) = \max(f(t) - K g(t), 0)$$

ト置ケバ $h(t)$ が (12) ヲ満足スルコトハ明カデアリ

$\int_0^1 h(t) dt < \infty$ トナルコトハ $\int_E g(t) dt < \infty$ ナル任意ノ可測集合 E = 對シテ

$$\begin{aligned}
 (15) \quad \int_E h(t) dt &= \int_{E \cap E_0} (f(t) - Kg(t)) dt \\
 &= \int_{E \cap E_0} f(t) dt - K \int_{E \cap E_0} g(t) dt \leq K
 \end{aligned}$$

トナルコトカラワカル。但シ $E_0 = \{t \mid f(t) - Kg(t) \geq 0\}$ アアル。コレニヨツテ定理ノ証明ガ完結スル。

(注意) 上ノ定理ノ証明ト全ク同ジ方針ニヨツテ決シ事實ガ証明サレル。

(定理) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ガ正項級数ニテ $0 \leq a_n \leq 1,$

$0 \leq b_n \leq 1, n = 1, 2, \dots$ ナルモノトスル。然レトキハ

$$(16) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} < \infty \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k} < \infty$$

ガ任意ノ部分系列 $\{n_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ ニ對シテ成立スルタメニ必要且十分ノ條件ハ

$$(17) \quad b_n \leq Ka_n + C_n$$

ガ $n = 1, 2, \dots$ ニ對シテ成立スル如キ常数 K ト正項収斂級数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ ガ存在スルコトデアアル。